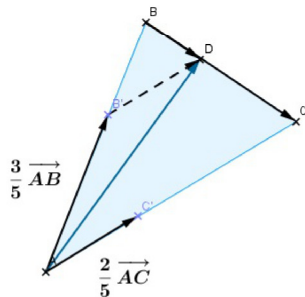
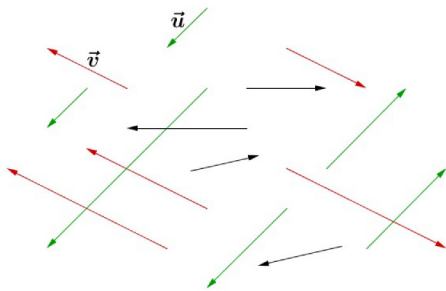


9. Correction des exercices

Exercice 6.1 Repassez en vert les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{u}$ et en rouge les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{v}$



Exercice 6.2 1°)

2°) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
 \vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} \\
 &= \vec{BA} + \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC} \\
 &= \left(+1 - \frac{3}{5}\right)\vec{BA} + \frac{2}{5}\vec{AC} \\
 &= \frac{2}{5}\vec{BA} + \frac{2}{5}\vec{AC} \\
 &= \frac{2}{5}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\
 &= \frac{2}{5}\vec{BC}
 \end{aligned}$$

Donc $\vec{BD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

Exercice 6.3 On utilise la caractérisation $xy' - yx' = 0$.

a) $2 \times (-1) - (-3) \times \frac{2}{3} = -2 + 2 = 0$

Donc les vecteurs sont colinéaires.

b) $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 + 1 = 0$

Donc les vecteurs sont colinéaires.

Exercice 6.4 (il est pertinent de s'aider de l'exercice corrigé qui est au-dessus...)

Si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires, alors les points A, B et M sont alignés.

Testons cette colinéarité, et calculant tout d'abord les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AM} \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -\frac{11}{2} & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ -7,5 \end{vmatrix}$$

Testons à présent la colinéarité : $2 \times (-7,5) - 5 \times (-3) = 0$, donc les deux vecteurs sont colinéaires.

Par suite, les points A, B et M sont alignés, c'est-à-dire $M \in (AB)$.

Exercice 6.5 Les points M, N et P sont colinéaires ssi $\vec{MN}$ et $\vec{MP}$ sont colinéaires, c'est-à-dire ssi :

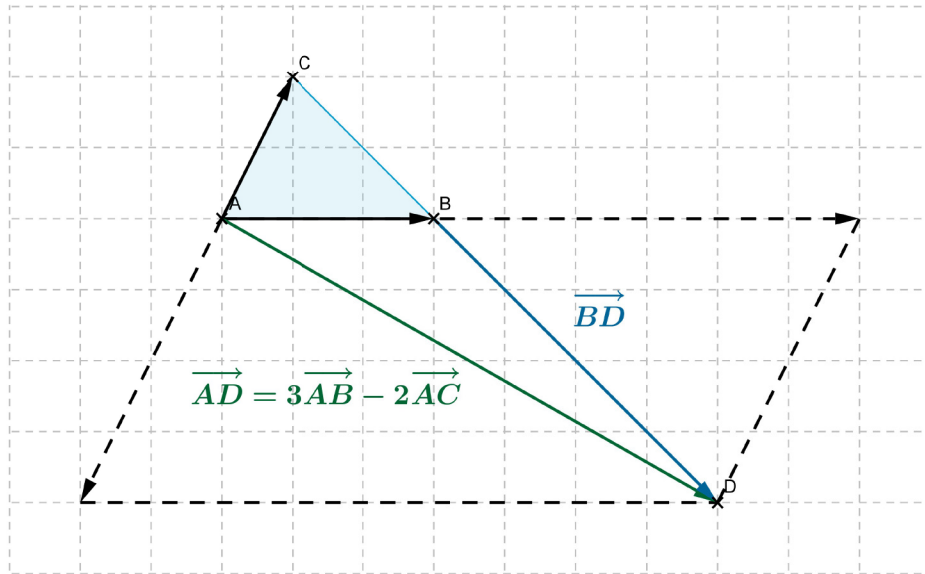
$$\begin{aligned} 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) - 2x &= 0 \\ -3 - 2x &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, les points sont alignés ssi $x = -\frac{3}{2}$.

Exercice 6.6 $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$

$$\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{w} = -\frac{3}{2}\vec{i} - 4\vec{j}$$



Exercice 6.7 1°)

$$2.a) \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + 3\vec{AB} - 2\vec{AC} = 2\vec{AB} - 2\vec{AC}$$

$$2.b) \text{ On a } \vec{BD} = 2(\vec{AB} - \vec{AC}) = 2(\vec{AB} + \vec{CA}) = 2\vec{CB}$$

Dons $\vec{BD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires ($\vec{BD} = 2\vec{BC}$).

Par suite, les points B, C et D sont alignés.

Exercice 6.8 a) On a $A(-2; 4)$ et $\vec{u} \begin{vmatrix} 3 = -b \\ 1 = a \end{vmatrix}$, donc une équation de la droite est de la forme $x - 3y + c = 0$ (*)

$A \in d$, donc en remplaçant dans (*) par les coordonnées de A, on peut trouver la valeur de c :

$$-2 - 3 \times 4 + c = 0 \Rightarrow c = 14.$$

Donc une équation de cette droite est $d \mid x - 3y + 14 = 0$.

Exercice 6.9 a) $A(1; 5)$ et $B(-3; 2)$.

On pourrait partir d'une équation "générique" $ax + by + c = 0$, dire que les coordonnées de A et B la vérifient, et aboutir ainsi à un système de deux équations à trois inconnues, mais il y a plus court :

$\vec{AB} \begin{vmatrix} -4 \\ -3 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Donc une équation de d est de la forme : $-3x + 4y + c = 0$ (*).

Or les coordonnées de A vérifient (*) : $-3 + 20 + c = 0$,

d'où $c = -17$, et une équation de d est : $d \mid -3x + 4y - 17 = 0$.

c) $A(4; 2)$ et $B(4; -3)$, donc $\vec{AB} \begin{vmatrix} 0 \\ -5 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de d...

...Mais on peut aussi voir que ce sont deux points d'abscisse 4 et que l'on a donc affaire à la droite $d \mid x = 4$.

Exercice 6.10 a) La droite d_1 a pour équation $d_1 : 3x - 2y + 5 = 0$, qui est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 5$.

Un vecteur directeur est donc $\vec{v}_1 \begin{vmatrix} -b = 2 \\ a = 3 \end{vmatrix}$

Le point d'intersection avec (par exemple) l'axe des abscisses est le point d'abscisse x tel que :

$$\begin{aligned} 3x - 2 \times 0 + 5 &= 0 \\ 3x + 5 &= 0 \\ x &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Donc d_1 est la droite de vecteur directeur $\vec{v}_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$, passant par $M_1(-\frac{5}{3}; 0)$.

b) La droite d_3 a pour équation $d_3 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$, qui est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = -1$.

Un vecteur directeur est donc $\vec{v}_3 \begin{vmatrix} -b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{vmatrix}$, ou encore $\vec{v}_3 \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$ ($v'_3 = -6v_3$)

Le point d'intersection avec (par exemple) l'axe des ordonnées est le point d'ordonnée y tel que :

$$\begin{aligned} 0/3 + y/2 - 1 &= 0 \\ y/2 &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Donc d_3 est la droite de vecteur directeur $\vec{v}_3 \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$, passant par $M_3(0; 2)$.

Exercice 6.11 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 = 4$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \times 4 = -12$

c) Idée : tourner le livre de $+\pi/2$ (c'est-à-dire 90° vers la gauche) !!!

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 = +12$

Exercice 6.12 $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Exercice 6.13 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow (-2) \times 5 + x \times 1 = 0 \Leftrightarrow -10 + x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Exercice 6.14 ABC est rectangle si $\vec{BA} \perp \vec{BC}$.

Or $\vec{BA}(-3; -1)$ et $\vec{BC}(2; -6)$.

Donc $\vec{BA} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow -6 + 6 = 0$.

Donc ABC est rectangle en B.

Exercice 6.15 a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' = 4 \times 2 + 2 \times (-5) = 8 - 10 = -2$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 2 \times \cos(\frac{2\pi}{3}) = 2 \times 2 \times (-\frac{1}{2}) = -2$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(\frac{\pi}{4}) = 2 \times 2\sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4$

Exercice 6.16 a) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$

On a donc les coordonnées des deux vecteurs, ce qui incite à utiliser la Pté ??.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 10 - 3 = 7$

b) $\vec{u}(1; 2)$, $\|\vec{v}\| = 3$, et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

On a les coordonnées de $\vec{u}$ (donc on peut calculer facilement sa norme), la norme de $\vec{v}$, et l'angle des vecteurs, ce qui incite à utiliser la Pté ??.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{5} \times 3 \times \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$

On a uniquement des normes, on fait donc appel à la Pté ??.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(4^2 - 2^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(16 - 4 - 9) = \frac{3}{2}$

Exercice 6.17 Dans la première égalité, on peut "remplacer" $\vec{AM}$ par $\vec{AO}$ car O est le projeté orthogonal de M sur (AB), et $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont dans le même sens.

Dans la deuxième égalité, en appliquant la Pté ?? on peut remplacer les vecteurs par leurs normes car ils sont colinéaires et de même sens, donc l'angle qu'ils forment est 0, et a pour cosinus 1.

Dans la dernière égalité, on peut remplacer AO par $\frac{AB}{2}$ car O est le milieu de [AB].

Exercice 6.18 a)

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= 3^2 + 12 \\
&= 21
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2\vec{u} \cdot (-3\vec{v}) &= 2 \times (-3) \times \vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= 2 \times (-3) \times 12 \\
&= -72
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\
&= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
&= 3^2 + 2 \times 12 + 5^2 \\
&= 9 + 24 + 25 \\
&= 58
\end{aligned}$$

On voit ici que les formules des "produits remarquables" sont utilisables pour le produit scalaire.

Exercice 6.19 1) Comme dans l'exercice précédent, nous allons appliquer la formule du "produit remarquable".

$$\vec{R}^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \|\vec{F}_2\|^2$$

$$\text{Donc } \vec{R}^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 200 \times \cos(50) + 200^2$$

$$\text{Finalement, } \vec{R}^2 \simeq 207134,51$$

$$2) \text{ Ainsi, } \|\vec{R}\| \simeq \sqrt{207134,51} \simeq 455,12 \text{ N} \simeq 455 \text{ N}.$$

Exercice 6.20 1) Et merci Monsieur Chasles !

$$\begin{aligned}
\vec{AC} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AA'} + \vec{A'C'} + \vec{C'C}) \cdot \vec{BD} \\
&= \vec{AA'} \cdot \vec{BD} + \vec{A'C'} \cdot \vec{BD} + \vec{C'C} \cdot \vec{BD} \\
&= 0 + \vec{A'C'} \cdot \vec{BD} + 0 \\
&= \vec{A'C'} \cdot \vec{BD}
\end{aligned}$$

2) D'après ce qui précède, on a donc $\vec{A'C'} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot \vec{BD} = -20$.

Or $\vec{A'C'}$ et $\vec{BD}$ sont colinéaires de sens opposés, donc d'après la Def ??, $\vec{A'C'} \cdot \vec{BD} = -A'C' \times BD = -20$.

Donc $A'C' \times BD = 20$, et par suite $A'C' = \frac{20}{BD}$.

...Reste à calculer BD ! C'est la diagonale du rectangle, donc en appliquant le théorème de Pythagore dans DAB rectangle en A, il vient : $BD = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \times 13} = 2\sqrt{13}$.

$$\text{Par suite, } A'C' = \frac{20}{2\sqrt{13}} = \frac{20 \times \sqrt{13}}{2\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{20 \times \sqrt{13}}{2 \times 13} = \frac{10 \times \sqrt{13}}{13}$$